Нелинейные граничные задачи. вып.14, с.138-145, 2004.

 М.А. Кулиев

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

При помощи метода Фурье исследуется обратная задача для многомерного параболического уравнения с неизвестными коэффициентами зависящими от времени.

Под обратной краевой задачей для дифференциального уравнения понимается задача, в которой наряду с решением данного дифференциального уравнения ищутся его коэффициенты и правая часть по некоторым дополнительным данным. Исследованиям таких обратных задач посвящены работы [1]-[7].

В данной работе, дополнительные условия заданы в виде $u_i(x,t) = h_i(t)$ $(i = 1,2)$ и с помощью метода Фурье исследуется классическое решение обратной задачи.

Предполагается, что неизвестные коэффициенты и правая часть уравнения зависят только от аргумента t.

В работе рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Lu(x,t) = a(t)b(x,t)u(x,t) + f(t)F(x,t), x(t) \in \overline{Q_T} \equiv \overline{\Omega} \times [0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma_T} = 0, \quad \Gamma_T \equiv S \times [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,t) = h_i(t) \quad (i = 1,2), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $0 < T < +\infty$; Ω – произвольная ограниченная n-мерная область, S – граница области Ω, Γ_T – боковая поверхность цилиндра Q_T, $x_i (i = 1,2)$ – различные фиксированные точки в Ω, а оператор L имеет вид:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - c(x)u,$$

причем всюду на $\overline{\Omega}$ функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $C(x) \geq 0$ измеримы и ограничены и $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 (\mu = const > 0)$, $\xi_i (i = \overline{1,n})$ – любые действительные числа.

Как известно, оператор L имеет счетную систему собственных чисел $0 > -\lambda_1^2 \geq -\lambda_2^2 \geq ... \geq -\lambda_k^2 \geq ...$ $(0 < \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty)$ и каждому λ_k соответствует лишь конечное число линейно независимых обобщенны собственных функций (см. [8], п.5, гл. 1, ст. 44).

Функции $\varphi(x), b(x,t), F(x,t)$ и $h_i(t)$ $(i = 1,2)$ – заданные, а $a(t), f(t), u(x,t)$ – искомые.

Определение. Тройку $\{u(x,t)a(t), f(t)\}$ функций $u(x,t), a(t), f(t)$ назовем классическим решением задачи (1)-(4), если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $u(x,t)$ непрерывна и имеет непрерывные производные u_t, u_{x_i}, $(i = \overline{1,n})$, $u_{x_ix_j} (i,j = \overline{1,n})$ в $\overline{Q_T}$.

This work was supported, in part,by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

2. Функции $a(t)$ и $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$.

3. Условия (1)-(4) удовлетворяются в классическом смысле.

С целью исследования задачи (1)-(4) введем следующие пространства.

1. Обозначим через $B^{\alpha}_{2,T}$ совокупность всех функций вида $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)v_k(x)$, рассматриваемых в $\overline{Q_T}$, где функции $u_k(t)(k=1,2,...)$ непрерывны на $[0,T]$ и

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\alpha}\max_{0\le t\le T}|u_k(t)|\right)^2\right\}^{1/2}\equiv J_T(u)<+\infty.$$

Здесь $\alpha\ge 0$, $-\lambda_k^2$ и $v_k(x)(k=1,2,...)$ – собственные значения и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ обобщенные собственные функции первой однородной краевой задачи для оператора L в Ω. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно, что все эти пространства банаховы (см. [9]).

2. Через E_T обозначим множество $B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}\times(C[0,T])^2$ с нормой

$$\|(u,a,f)\|_{E_T}=\|u\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}+\|a\|_{C[0,T]}+\|f\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что E_T – банахово пространство. Предположим, что $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $c(x), b(x,t), \varphi(x), F(x,t)$ и $h_i(t)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$ $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.

2. $S\in C^{[\frac{n}{2}]+2}$.

3. Собственные функции $v_k(x)$ оператора L при граничном условии $v_k\big|_S=0$ $(k=1,2,...)$ $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$ (для этого достаточно, чтобы функции $a_{ij}(i,j=\overline{1,n})$ были $2\left[\frac{n}{2}\right]+4$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$, функция $c(x)$ была $2\left[\frac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируема на $\overline{\Omega}$ и $S\in C^{2[\frac{n}{2}]+5}$, ибо при этих условиях собственные функции $v_k(x)$ $(k=1,2,...)$ оператора L принадлежат $W_2^{2[\frac{n}{2}]+4}(\Omega)$ (см. [8], гл. 1, п. 5, с. 47); следовательно, по теореме С.Л. Соболева, $v_k(x)$ $(k=1,2,...)$ $\left[\frac{n}{2}\right]+3$ раза непрерывно дифференцируемы на $\overline{\Omega}$.

4. Функция $\varphi(x)\in W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)$, $\varphi(x)\big|_S=L\varphi(x)\big|_S=\cdots=L^{[\frac{n}{4}]+1}\varphi(x)\big|_S=0$.

5. $\frac{\partial^i b(x,t)}{\partial x_1^{a_1}\ldots\partial x_n^{a_n}}\left(i=\overline{0,[\frac{n}{2}]+2}\right)\in C(\overline{Q_T})$ и $\frac{\partial^j b(x,t)}{\partial x_1^{a_1}\ldots\partial x_n^{a_n}}=0\left(t\in[0,T],\,x\in S;\,j=\overline{0,2[\frac{n+2}{4}]}\right)$.

6. Функция

$$F(x,t)\in W_{x,t,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T),\ F(x,t)\big|_{\Gamma_T}=LF(x,t)\big|_{\Gamma_T}=\cdots=L^{[\frac{n+2}{4}]}F(x,t)\big|_{\Gamma_T}=0.$$

7. Функции $h_i(t)$ $(i=1,2)$ непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$, $\forall t\in[0,T]$ $h_i(t)\ne 0$ $(i=1,2)$ и $h_i(0)=\varphi(x_i)$ $(i=1,2)$.

8. $\Delta(t)\equiv b(x,t)\,h_1(t)\,F(x_2,t)-b(x_2,t)\,h_2(t)\,F(x_1,t)\ne 0\quad\forall t\in[0,T]$.

В работе существование классического решения обратной задачи доказывается методом Фурье, причем для существования классического решение задачи (1)-(3) на данные функции $a_{ij}(x)$ $(i,j=\overline{1,n})$, $c(x)$, $b(x,t)$, $\varphi(x)$, $F(x,t)$ и на поверхность S накладываются условия 1-6 (см. [12]).

При выполнении условий 1-6, применяя метод Фурье и учитывая условия (4), решение задачи (1)-(4) сведено к решению следующей эквивалентной системы интегральных уравнений (см. [7]):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}v_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\big[a(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\tau)F(\xi,\tau)\big]e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}v_k(\xi)d\xi d\tau v_k(x), \tag{5}$$

$$a(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\big\{F(x_2,t)\Phi_1(u,a,f;t)-F(x_1,t)\Phi_2(u,a,f;t)\big\}, \tag{6}$$

$$f(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\big\{b(x_1,t)h_1(t)\Phi_2(u,a,f;t)-b(x_2,t)h_2(t)\Phi_1(u,a,f;t)\big\}, \tag{7}$$

где

$$\Phi_i(u,a,f;t)=h_i'(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}v_k(x_i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int\limits_0^1\int\limits_{\Omega}\big[a(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\tau)F(\xi,\tau)\big]\,e^{-\lambda_k^2 t}v_k(\xi)d\xi d\tau v_k(x_i)\;(i=1,2),$$

$$\varphi_k=\int\limits_{\Omega}\varphi(\xi)v_k(\xi)d\xi\;(k=1,2,...).$$

Справедлива следующая

Теорема . Пусть выполняются условия 1-8. Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(4) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Запишем систему (5)-(7) в виде:

$$z=G(z),$$

где $z=\{u(x,t),a(t),f(t)\}$, $G(z)=\{G_1(z),G_2(z),G_3(z)\}$, причем компоненты $G_i(u,a,f)$ $(i=\overline{1,3})$ оператора $G(u,a,f)$ определены правыми частями уравнений (5)-(7). Рассмотрим оператор $G(u,a,f)$ в шаре K_R $(\|z\|_{E_T}\le R)$ пространства E_T, где

$$\sqrt{2}\|\varphi(x)\|_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)}+\frac{1}{\min\limits_{0\le t\le T}|\Delta(t)|}\Big\{\Big(\big\|F(x_2,t)\big\|_{C[0,T]}+$$

$$+\big\|b(x_2,t)\big\|_{C[0,T]}\big\|h_2(t)\big\|_{C[0,T]}\Big)\big\|h_1'\big\|_{C[0,T]}+$$

$$+\Big(\big\|F(x_1,t)\big\|_{C[0,T]}+\big\|b(x_1,t)\big\|_{C[0,T]}\big\|h_1(t)\big\|_{C[0,T]}\Big)\big\|h_2'\big\|_{C[0,T]}+$$

$$+\Big(\big\|F(x_2,t)\big\|_{C[0,T]}+\big\|b(x_2,t)\big\|_{C[0,T]}\big\|h_2(t)\big\|_{C[0,T]}\Big)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{1/2}+$$

$$+\Big(\big\|F(x_1,t)\big\|_{C[0,T]}+\big\|b(x_1,t)\big\|_{C[0,T]}\big\|h_1(t)\big\|_{C[0,T]}\Big)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{1/2}\equiv M<R.$$

Тогда для любого $(u, a, f) \in K_R$ применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая условия 1-8, имеем:

$$\left\|G_1(u,a,f)\right\|^2_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + $$

$$\left\|G_1(u,a,f)\right\|^2_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}} + \begin{cases} 2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[L^{r+1}\mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau))\right]^2 d\xi d\tau \quad \text{при} \quad n = 4r, 4r+1, \\ 2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left\{ \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi) \frac{\partial L^{r+1}\mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau))}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial L^{r+1}\mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau))}{\partial \xi_j} + \right. \\ \left. + C(\xi)\left[L^{r+1}\mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau))\right]^2 \right\} d\xi d\tau \quad \text{при} \quad n = 4r+2, 4r+3, \end{cases}$$

$$\left\|G_2(u,a,f)\right\|_{C[0,T]} \leq \left\|W_2(x,t)\right\|_{C[0,T]} +$$
$$+ \left\|K_1(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^T \left[\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+2} \int\limits_\Omega \mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau)) v_k(\xi) d\xi \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}. \tag{9}$$

$$\left\|G_3(u,a,f)\right\|_{C[0,T]} \leq \left\|W_3(x,t)\right\|_{C[0,T]} +$$
$$+ \left\|K_2(t)\right\|_{C[0,T]} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^T \left[\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+2} \int\limits_\Omega \mathbf{F}(u(\xi,\tau),a(\tau),f(\tau)) v_k(\xi) d\xi \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}, \tag{10}$$

где

$$W_1(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x),$$

$$W_2(x,t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left\{ F(x_2,t)\left(h_1'(t) + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_1) \right) - \right.$$
$$\left. - F(x_1,t)\left(h_2'(t) + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_2) \right) \right\},$$

$$W_3(x,t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left\{ b(x_1,t)h_1(t)\left(h_2' + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_2) \right) - \right.$$
$$\left. - b(x_2,t)h_2(t)\left(h_1'(t) + \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_1) \right) \right\},$$

$$K_1(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left[F(x_1,t) \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} - F(x_2,t) \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} \right],$$

$$K_2(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \left[b(x_1,t)h_2(t) \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} - b(x_1,t)h_1(t) \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}} \right)^2 \right\}^{1/2} \right],$$

$$\mathbf{F}(u(x,t),a(t),f(t))=a(t)b(x,t)u(x,t)+f(t)F(x,t).$$

Из (8)-(10) получаем

$$\left\|G_1(u,a,f)\right\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}\le\left\|W_1(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}+\sqrt{2}c_1\left\|\mathbf{F}(u(x,t),a(t),f(t))\right\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)},\tag{11}$$

$$\left\|G_2(u,a,f)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|W_2(x,t)\right\|_{C[0,T]}+c_2\left\|K_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|\mathbf{F}(u(x,t),a(t),f(t))\right\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{4}]+2,0}(Q_T)},\tag{12}$$

$$\left\|G_3(u,a,f)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|W_3(x,t)\right\|_{C[0,T]}+c_3\left\|K_2(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|\mathbf{F}(u(x,t),a(t),f(t))\right\|_{W_{x,t,2}^{[\frac{n}{4}]+2,0}(Q_T)},\tag{13}$$

где

$$\left\|W_1(x,t)\right\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}\le\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{[\frac{n}{2}]+3}\varphi_k\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\left\{\begin{array}{ll}C\left(\sqrt{D(L^{r+1}\varphi)}\right) & \text{при}\quad n=4r,4r+1,\\ C\left\|L^{r+1}\varphi\right\|_{L_)2(\Omega)} & \text{при}\quad n=4r+2,4r+3,\end{array}\right.$$

$$\left\|W_2(x,t)\right\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{\min\limits_{0\le t\le T}|\Delta(t)|}\Bigg\{\left\|F(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\cdot\left\|h_1'(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\left\|F(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_2'(t)\right\|_{C[0,T]}+\left[\left\|F(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\left\|F(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\left\|\varphi\right\|_{W_2^{[\frac{n}{4}]+2}(\Omega)}\Bigg\},$$

$$\left\|W_3(x,t)\right\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{\min\limits_{0\le t\le T}|\Delta(t)|}\Bigg\{\left\|b(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\cdot\left\|h_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_2'(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\left\|b(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_2(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_1'(t)\right\|_{C[0,T]}+$$
$$+\left[\left\|b(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$+\left\|b(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_2(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\left\|\varphi\right\|_{W_2^{[\frac{n}{4}]+2}(\Omega)}\Bigg\},$$

$$\left\|K_1(t)\right\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{\min\limits_{0\le t\le T}|\Delta(t)|}\Bigg\{\left\|F(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left\|F(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\|K_2(t)\right\|_{C[0,T]}\le\frac{1}{\min\limits_{0\le t\le T}|\Delta(t)|}\Bigg\{\left\|b(x_2,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_2(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_2)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left\|b(x_1,t)\right\|_{C[0,T]}\left\|h_1(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{v_k(x_1)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$C>0$, $c_i>0\,(i=\overline{1,3})$ – некоторые постоянные, а

$$D(z)=\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial z}{\partial x_j}+cz^2\right\}dx.$$

Из работы [10] следует, что при условиях данной теоремы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\lambda_k^{[\frac{n}{4}]+1}}$ при $x\in\overline{\Omega}$ равномерно сходится.

Тогда, из (11)-(13) получаем, что $\forall u,a,f\in E_T$:

$$\begin{aligned}\big\|G(u,a,f)\big\|_{E_T}\leq\big\|W_1(x,t)\big\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}+\big\|W_2(x,t)\big\|_{C[0,T]}+\\+\big\|W_3(x,t)\big\|_{C[0,T]}+C_4\big\|\mathbf{F}(u(x,\tau),a(t),f(t))\big\|_{W_{x,\tau,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)},\end{aligned}\tag{14}$$

где $C_4>0$ – некоторая постоянная.

Пользуясь теоремами вложения С.Л. Соболева и структурой пространства $B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$ для любых $u\in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$ и $t\in[0,T]$ имеем:

$$\left\|\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x_1^{a_1}\ldots\partial x_n^{a_n}}\right\|_{L_2(\Omega)}\leq C_5\big\|u\big\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}\quad\Big(i=\overline{0,[\frac{n}{2}]+3}\Big),\tag{15}$$

где $C_5>0$ – некоторая постоянная, не зависящая от u и t.

Пользуясь оценкой (15), из (14) получаем что, $\forall u,a,f\in K_R$:

$$\big\|G(u,a,f)\big\|_{E_T}\leq\big\|W_1(x,t)\big\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}+\big\|W_2(x,t)\big\|_{C[0,T]}+\big\|W_3(x,t)\big\|_{C[0,T]}+\sqrt{T}C_R,\tag{16}$$

где $C_R>0$ – некоторая число, зависящее от R.

Далее, аналогично (16), $\forall(u,a,f),(\tilde{u},\tilde{a},\tilde{f})\in K_R$ имеем:

$$\big\|G(u,a,f)-G(\tilde{u},\tilde{a},\tilde{f})\big\|_{E_T}\leq C\sqrt{T}\big\|\mathbf{F}(u,a,f)-\mathbf{F}(\tilde{u},\tilde{a},\tilde{f})\big\|_{W_{x,\tau,2}^{[\frac{n}{2}]+2,0}(Q_T)}.\tag{17}$$

Теперь, пользуясь оценкой (15) (в которой вместо u нужно иметь в виду $u-\tilde{u}$), из (16) получаем, что $\forall(u,a,f)$, $(\tilde{u},\tilde{a},\tilde{f})\in K_R$:

$$\big\|G(u,a,f)-G(\tilde{u},\tilde{a},\tilde{f})\big\|_{E_T}\leq\tilde{C}_R\sqrt{T}\Big[\big\|u-\tilde{u}\big\|_{B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}}+\big\|a-\tilde{a}\big\|_{C[0,T]}+\big\|f-\tilde{f}\big\|_{C[0,T]}\Big],\tag{18}$$

где $\tilde{C}_R>0$ – некоторое число, зависящее от R.

Из неравенств (16) и (18) видно, что при достаточно малых значениях T оператор G является в шаре K_R оператором сжатия, и, следовательно, имеет в шаре K_R единственную неподвижную точку $(u(x,t),a(t),f(t))$, следовательно

$$u(x,t)=W_1(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left[a(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\tau)F(\xi,\tau)\right]e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}v_k(\xi)d\xi d\tau\cdot v_k(x),$$

$$a(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\left\{F(x_2,t)\Phi_1(u,a,f;t)-F(x_1,t)\Phi_2(u,a,f;t)\right\},$$

$$f(t)=\frac{1}{\Delta(t)}\left\{b(x_1,t)h_1(t)\Phi_2(u,a,f;t)-b(x_2,t)h_2(t)\Phi_1(u,a,f;t)\right\}.$$

Таким образом, функции $u(x,t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}, a(t), f(t)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (5)-(7).

Теперь покажем, что $(u(x,t), a(t), f(t))$ являются классическим решением задачи (1)-(4). Так как $\sum\limits_{s=1}^{\infty} u_s(t)v_s(x) = u(x,t) \in B_{2,T}^{[\frac{n}{2}]+3}$, то очевидно, что функция $u_{pq}(x) = \sum\limits_{s=p}^{q} u_s(t)v_s(x)$ $(1 \le p \le q)$ удовлетворяет условиям леммы 1 (см. [8], с.84,88).

Тогда из (5), в силу леммы 1 (при $m = [\frac{n}{2}]+3,\ v = u_{pq}(x,t)$), получаем, что $t \in [0,T]$

$$\left\|u_{pq}(x,t)\right\|^2_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)} \le C\sum_{s=p}^{q}\left[\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3}u_s(t)\right]^2 \le C\sum_{s=p}^{q}\max_{0\le t\le T}\left(\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3}|u_s(t)|\right)^2, \tag{19}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

Из (19), в силу сходимости числового ряда $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left(\lambda_s^{[\frac{n}{2}]+3}\max\limits_{0\le t\le T}|u_s(t)|\right)^2$, следует, что $\|u_{pq}(x,t)\|^2_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)} \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$ при $p,q \to \infty$.

Итак, мы получаем, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} u_s(t)v_s(x)$$

и ряды, полученные из них дифференцированием по $x_1, ..., x_n$ до $[\frac{n}{2}]+3$ раза включительно, сходятся в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно $t \in [0,T]$. Тогда очевидно,что

$$u(x,t) \in C\Big([0,T]; W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)\Big). \tag{20}$$

Из (20), в силу теорем вложения С.Л. Соболева, получаем, что каждая из функций

$$u(x,t), u_{x_i}(x,t)\ (i=\overline{1,n}), \quad u_{x_ix_j}(i,j=\overline{1,n})$$

непрерывна в замкнутой области $\overline{Q_T}$. Далее, можно показать, что для каждого фиксированного $t \in [0,T]$ при всех $x \in \overline{\Omega}$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - Lu(x,t) = a(t)b(x,t)u(x,t) + f(t)F(x,t). \tag{21}$$

Из (21) следует, что $u_t \in C(\overline{Q_T})$ и уравнение (1) удовлетворяется в $\overline{Q_T}$ в обычном смысле. Легко проверить, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (2) в обычном смысле. Более того,

$$\left\|u(x,t) - \varphi(x)\right\|_{W_2^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)} \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0.$$

Для эквивалентности обратной задачи и системы (5)-(7) нам надо доказать выполнение условий (4). Тогда из (5), в силу данной теоремы получаем, что

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\varphi_k e^{-\lambda_k^2 t}v_k(x_i) + a(t)b(x_i,t)u(x_i,t) + f(t)F(x_i,t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\int_0^t\int_\Omega\left[a(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)F(\xi,\tau)\right]e^{-\lambda_k^2(t-\tau)}v_k(\xi)d\xi d\tau \cdot v_k(x_i)\ (i=1,2). \tag{22}$$

Из (6), (7) имеем

$$h_i'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \varphi_k e^{-\lambda_k^2 t} v_k(x_i) + a(t)b(x_i,t)h_i(t) + f(t)F(x_i,t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \int_0^t \int_\Omega \left[a(\tau)b(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)F(\xi,\tau)\right] e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} v_k(\xi) d\xi d\tau \cdot v_k(x_i) \; (i=1,2). \quad (23)$$

Отсюда, имеем

$$\frac{d}{dt}(u(x_i,t) - h_i(t)) = a(t)b(x_i,t)\,(u(x_i,t) - h_i(t)) \; (i=1,2). \quad (24)$$

В силу условия 7 данной теоремы:

$$u(x_i,0) - h_i(0) = 0 \; (i=1,2). \quad (25)$$

Тогда для функции $u(x_i,t) - h_i(t)$ $(i=1,2)$ получим задачу Коши (24)-(25). Отсюда имеем

$$u(x_i,t) - h_i(t) \equiv 0 \; (i=1,2) \;\; \forall t \in [0,T].$$

□

1. *Лаврентьев М.М., Васильев В.Г., Романов В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск, 1969. – 67 с.
2. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1978. – 120 с.
3. *Намазов Г.К.* Обратные задачи теории уравнений математической физики. – Баку, 1984. – 125 с.
4. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задач математической физики. Ч.1 // Дифференц. уравнения. – 1985. – т.21, No. 1 – С. 119–129.
5. *Безнощенко Н.Я.* Об определении коэффициентов при младшем члене общего параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1976. – Вып. 12. – No. 1. – С. 175–176.
6. *Искендеров А.Д.* Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // ДАН СССР. – 1975. – 255, 5. – С. 1005–1008.
7. *Кулиев М.А.* Многомерная обратная краевая задача для уравнения параболического типа в ограниченной области // Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук. – No. 1. – 1997. – С. 106–113.
8. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. – М.: Гостехиздат, 1953, 279 с.
9. *Худавердиев К.И.* Исследование классического решения многомерной смешанной задачи для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Уч. записки АГУ, сер. физ.-мат.наук, No. 1 – Баку. – 1972. – С. 3–28.
10. *Ильин В.А., Шишмарев И.А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР, серия мат. – 24. – 1960. – С. 883–896.
11. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука. – 1976. – 391 с.
12. *Калантаров В.К.* О смешанной задаче для полулинейных параболико-гиперболических систем уравнений // ДАН Азерб.ССР. No. 3. – 1974. – С. 20–26.

Бакинский государственный университет

Получено 13.04.04